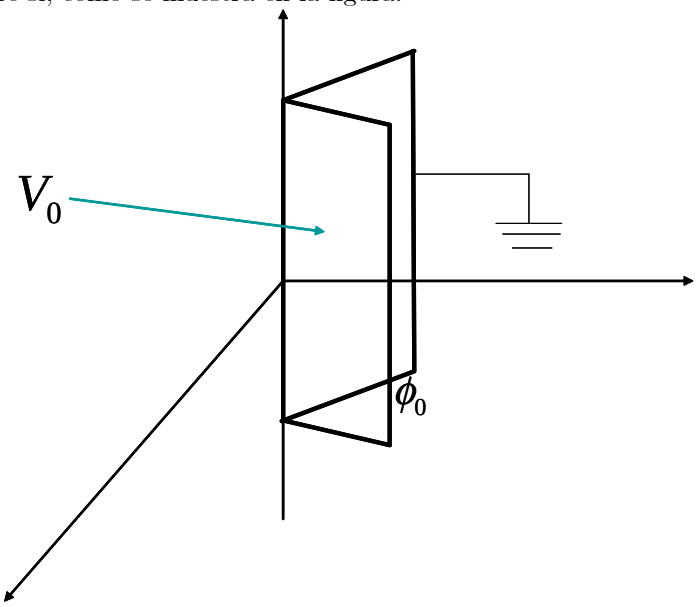
Teoría Electromagnética, R.S. Murphy. Capítulo 3, ejercicio 3.4, página 117.

Dos planos conductores semi-infinitos se colocan formando un ángulo ϕ_0 entre si, como se muestra en la figura.



Si los planos se aislan, y uno se mantiene a un potencial $V = V_0$, mientras el otro se mantiene aterrizado:

a) Determina el potencial para la región entre los planos

b) Calcula el campo eléctrico en la misma región

c) Encuentra la densidad superficial de carga en el plano cargado

Solución:

Supongamos primero que el potencial $V(\rho, \theta)$ (en coordenadas cilíndricas) no depende de ρ.

En ese caso la ecuación de Laplace es

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

ó bien

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} = 0$$

cuya solución es

$V(\theta) = a\theta + b$

Imponiendo la primera condición de frontera

$V(\theta = 0) = 0$

nos da

$V(\theta = 0) = a(0) + b = 0$

que implica que

$b = 0$

Así que

$V(\theta) = a\theta$

Con la segunda condición de frontera tenemos,
$V(\theta = \beta) = V_0$
que queda
$V(\theta = \beta) = a\beta = V_0$
o sea
$a = \dfrac{V_0}{\beta}$
y la solución es
$V(\theta) = \dfrac{V_0}{\beta}\theta$

Si dejamos la dependencia en ρ, tenemos la ecuación de Laplace
$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 0$
que tiene la solución
$V(\rho,\theta) = (A_0 + B_0\ln\rho)(C_0 + D_0\theta) + \sum_\nu \left(A_\nu\rho^\nu + \dfrac{B_\nu}{\rho^\nu}\right)(C_\nu\cos(\nu\theta) + D_\nu\sin(\nu\theta))$
Si exijimos que V sea finito sobre el eje Z, tenemos
$B_\nu = 0$ para toda ν.
La solución es por ahora
$V(\rho,\theta) = (A_0 + B_0\ln\rho)(C_0 + D_0\theta) + \sum_\nu A_\nu\rho^\nu(C_\nu\cos(\nu\theta) + D_\nu\sin(\nu\theta))$
Pedimos ahora que
$V(\rho,\theta = 0) = 0$
o sea
$V(\rho,\theta = 0) = (A_0 + B_0\ln\rho)C_0 + \sum_\nu A_\nu\rho^\nu C_v = 0$
que da
$C_0 = 0,$
y
$C_\nu = 0$
para toda ν.
Por ahora vamos en
$V(\rho,\theta) = D_0\theta(A_0 + B_0\ln\rho) + \sum_\nu A'_\nu\rho^\nu\sin(\nu\theta)$
Ahora imponemos
$V(\rho,\theta = \beta) = V_0$
o sea
$V(\rho,\theta = \beta) = D_0\beta(A_0 + B_0\ln\rho) + \sum_\nu A'_\nu\rho^\nu\sin(\nu\beta) = V_0$
de donde
$B_0 = 0, \quad A_0 D_0\beta = V_0, \quad \nu\beta = n\pi$
y
$V(\rho,\theta) = \dfrac{V_0}{\beta}\theta + \sum_\nu A'_n\rho^{n\pi/\beta}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\beta}\theta\right)$

Para determinar los coeficientes A'_n debemos saber como se comporta el potencial en el infinito, lo cual no está especificado en este problema.